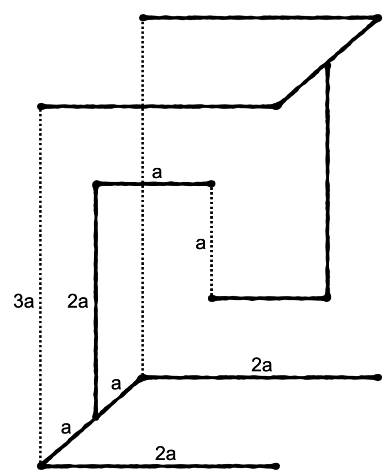
AZ 53. – egyben 25. nemzetközi – ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2023. február 17–27.

1. Az ábrán egy *tensegrity* elv alapján készült asztal vázát látjuk. A szerkezet két egymással egybevágó homogén vonalmenti tömegeloszlású drótvázból (folytonos vastag vonal) és az őket összekötő három kötélből (pontozott vékony vonal) áll. Az asztal talapzata és asztallapja is $2a$ oldalú négyzet, melyeknek egyik éle hiányzik, az asztallap és a talapzat éppen egymás fölött helyezkedik el. Az asztal magassága és a hosszabb kötelek hossza $3a$, a rövid kötél hossza a, a drótváz mindenhol derékszögben hajlik.



Tegyük fel, hogy a tensegrity szerkezet talapzata vízszintes síkon van rögzítve! Milyen irányba mozdulnak az asztallap csúcsai, ha elvágjuk

a) a rövidebb, b) az egyik hosszabb kötelet?

Adjuk meg az egyes csúcsok elmozdulásának irányvektorát!

Egy videó a *tensegrity* asztal készítéséről: https://youtu.be/ROnxjj5jPDs

További információ: https://en.wikipedia.org/wiki/Tensegrity

(Gáspár Merse Előd)

2. Fontoljuk meg két hadsereg harcának a következő alapmodelljét: Az A sereg minden katonája időegységenként lelő α ellenséges katonát, a B sereg minden katonája időegységenként lelő β ellenséges katonát. A harc addig tart, amíg az egyik sereg teljesen megsemmisül.

Hogyan függ a csata kimenetele az α és β paraméterektől, valamint a seregek kezdeti méretétől? Meddig tart a csata? A győztes sereg hány túlélője marad a csatamezőn?

Az alapmodell keretein belül, vagy kis módosításokkal, tárgyaljuk a következő harcászati fogalmakat: támadóerő, védelmi erő, rajtaütés, seregek összevonása.

(Bihary Zsolt)

3. Napelemes mérést végeztünk Budapesten június 19-én, egy tökéletesen tiszta napon: az égen egyetlen felhő sem volt.

Megmértük a napelem-panel kimenő teljesítményét (lásd az alábbi adatokat). A környező levegő hőmérséklete a $T_a = 29,1 - 0,16\,(t - 14,6)^2$ [C] függvény szerint változott, ahol t a helyi időt jelöli (órában mérve), azaz a legmelegebb hőmérsékletet helyi idő szerint 14:36 órakor mértük.

A napelem természetesen melegebb volt, mint a levegő, hőmérséklete $T_p = T_a + K\,P$, szerint változott, ahol P a napelem-panel teljesítménye, K pedig egy állandó. A napelem hatásfoka (a napenergia villamos energiává alakított hányada) a hőmérséklet növekedésével 0,35 %/C mértékben csökken. A napelem majdnem vízszintesen áll, a vízszintes síkhoz képest 4 fokkal dől a 184 fokos irányba (azaz a déli iránytól 4 fokkal nyugatra).

Kérdések: Mennyi volt légkör által elnyelt vagy visszavert napenergia hányada délben; reggel 8:00 órakor és este 19:00 órakor?

És mekkora a K arányossági tényező értéke?

A mért pillanatnyi teljesítmény (kW-ban) az alábbiakban látható, 10 percenként, reggel 7:20-tól 19:10-ig:

0,81, 0,90, 0,98, 1,07, 1,16, 1,23, 1,32, 1,40, 1,47, 1,55, 1,63,
1,70, 1,76, 1,83, 1,89, 1,94, 2,00, 2,04, 2,10, 2,15, 2,17, 2,23, 2,28,
2,29, 2,31, 2,34, 2,36, 2,35, 2,38, 2,41, 2,40, 2,40, 2,43, 2,39, 2,42,
2,44, 2,41, 2,41, 2,37, 2,34, 2,33, 2,30, 2,28, 2,24, 2,21, 2,17, 2,12,
2,07, 2,02, 1,98, 1,91, 1,87, 1,81, 1,75, 1,68, 1,61, 1,54, 1,46, 1,39,
1,32, 1,24, 1,16, 1,07, 0,99, 0,90, 0,82, 0,73, 0,65, 0,55, 0,47, 0,39, 0,31.

(Veres Gábor)

4. Egy húsboltban egy napon összesen M kg húst adtak el N adagban. Minden adag húst papírba csomagoltak és mérlegen mértek le. A fogyasztóvédelmi előírásoknak megfelelően mielőtt a húst a papírba tették volna, a csomagolópapírt ráhelyezték a mérlegre, majd a mérleg állását lenullázták.
Tegyük fel, hogy a mérleg véletlenszerű mérési hibája normális eloszlást követ

a) a mért tömegtől független állandó σ szórással, vagy

b) a mért tömeggel arányos szórással, ahol a szórás σ értéke a mért mennyiség kicsiny ε hányadaként nő a mért tömeggel arányosan.

A vizsgált nap folyamán a felhasznált N darab csomagolópapír teljes tömege m kg volt. Mit mondhatunk a nap végén az m kg-nyi csomagolópapír húsáron történő eladásáról?

Pontosabban fogalmazva: Mi a valószínűsége annak, hogy az m tömegű csomagolópapír x-ed részét húsáron adták el a mérleg a), illetve b) típusú hibája esetén? Mi a valószínűsége annak, hogy a teljes papírmennyiség húsárban kelt el?

Hogyan változik a válasz a fenti kérdésekre, ha a kereskedő kijátssza a fogyasztóvédelmi intézkedéseket, és nem nullázza a mérleget a papír ráhelyezése után?

Hogyan függ az eredmény attól, hogy az N eladott húsdarab tömege egyformán M/N volt, vagy az egyes darabok tömege az M/N érték körüli normális eloszlást követett?

Vizsgáljuk meg a válasz érzékenységét az M, N, m, σ és ε paraméterek értékére, beleértve az extrém értékeket is!

(Glöckler Oszvald és Dávid Gyula)

5. Egy pingponglabda a vízszintes síkú pingpongütőn nyugszik. Az ütőt egy adott időpillanatban tisztán transzlációs módon mozgatni kezdjük úgy, hogy középpontja egy vízszintes síkú, r sugarú körön haladjon állandó, v nagyságú sebességgel (eközben az ütő síkja mindvégig vízszintes marad). Írjuk le a labda mozgását! Milyen nyomot hagy az enyhén begrafitozott labda az ütőn? (Tegyük fel, hogy a labda nem hagyja el az ütő felületét és nem csúszik meg rajta.)

(Vigh Máté)

6. Egy m tömegű és Θ tehetetlenségi nyomatékú, R sugarú henger alakú, csapágyazott tengelye körül forgó testet tengelyénél megfogunk, majd vízszintes helyzetben, óvatosan, ütközés nélkül az asztalra tesszük, és az érintkezés pillanatában elengedjük a tengelyt. Ekkor a test vízszintes, tengelyre merőleges irányú sebessége v_0, forgásának szögsebessége ω_0 (a kezdeti szögsebesség pozitív és negatív is lehet). A test és az asztal közti súrlódási együttható μ, a gördülési súrlódás együtthatója 0.

   A test az asztalra érkezéskor nem pattan vissza, hanem egy ideig csúszva, majd egy idő után tisztán, csúszás nélkül gördül.

   Hogyan függ a végső gördülés V sebessége a μ súrlódási együtthatótól és a test tömegeloszlására jellemző $k = \Theta/mR^2$ paramétertől? Magyarázzuk meg az eredményt!

(Takács Gábor)

7. Valamikor a távoli jövőben gravitációs alapon működő globális metróhálózatot alakítanak ki a Föld belsejében úgy, hogy a felszínen fekvő különböző városokat egyenes alagutakkal kötik össze. Az utazás kezdetén a metrókocsik nulla kezdősebességgel indulnak. Tekintsük a Földet homogén tömegeloszlású gömbnek, és hanyagoljuk el a súrlódást, valamint az alagutak építésének és hőszigetelésének költségeit, de vegyük figyelembe a Föld forgásának hatásait!

   Számítsuk ki a Föld tetszőleges két pontja (melyeket földrajzi koordinátájukkal adunk meg) közti utazás idejét a koordináták függvényében! Hogyan viszonylik egymáshoz a két város közti oda- és visszaút ideje? Mekkora sebességgel érkeznek meg a metrókocsik az alagút másik végén a felszínre? Egy adott városból indulva melyik városba jut el leggyorsabban a metró?

(Gombkötő Ákos és Dávid Gyula)

8. Egy R sugarú és M tömegű, függőleges síkú, vékony abroncs belső kerületére egy m tömegű, pontszerű nehezék van rögzítve. Ezt a testet stabil egyensúlyi helyzetében egy nyugalomban lévő, vízszintes futószalagra helyezzük úgy, hogy az abroncs síkja párhuzamos legyen a futószalag széleivel. Egy adott pillanatban a futószalag állandó a gyorsulással mozogni kezd.

   a) Legalább mekkora legyen a értéke, hogy a nehezék átlendüljön a legfelső holtponton?

   b) Mekkora az abroncs legnagyobb szögsebessége abban az esetben, ha a szalag gyorsulása az előző alkérdésben kiszámolt értéknél egy hangyányival kisebb?

   Az abroncs nem csúszik meg a futószalagon, és síkja mindvégig függőleges marad, azaz a mozgás kétdimenziós.

(Vigh Máté)

9. Turbulens Anna és Lamináris Bob két különböző ejtőtoronyban végez kísérleteket: tárgyakat ejtenek le, miközben mérik azok sebességét és gyorsulását. Tudják, hogy a gravitációs gyorsulás $g = 9,81$ m/s^2. Azt is tudják, hogy az egyik toronyban a légellenállási erő mindig arányos a sebességgel, a másikban pedig a sebesség négyzetével. Nincsenek tisztában saját nevük jelentésével, és próbálják eldönteni, melyik toronyra melyik törvény vonatkozik, de mint látni fogjuk, ezzel nem túl szerencsések.

   Először is mindketten fogják a saját tárgyukat, leejtik, sokáig várnak, majd megmérik tárgyaik végső, aszimptotikus sebességét (azaz amikor a gyorsulás eléri a nullát). Feltesszük, hogy a kísérlethez használt tornyok elegendően magasak ahhoz, hogy a leeső testek a padlóhoz ütközés nélkül megközelíthessék az aszimptotikus sebességet. A kísérletezők felhívják egymást telefonon, és meglepetésükre azt tapasztalják, hogy mindkettőjük ugyanazt a sebességértéket mérték. Jelöljük ezt a sebességet V-vel.

   Így aztán megegyeznek a második kísérletben: mindketten megmérik tárgyuk gyorsulását, pontosan 1,2424 másodperccel azután, hogy elejtették. Aztán felhívják egymást, és most még jobban meglepődnek, mert ismét ugyanazt az eredményt kapták!

   Nos, láthatóan nem haladtak sokat... – de vajon te a fenti információk alapján ki tudod számítani a V sebességet?

   (Veres Gábor)

10. A háromtest-probléma az égi mechanika klasszikus feladata: három test mozgását vizsgáljuk kölcsönös gravitációs vonzásuk figyelembe vételével. A korlátozott háromtest-probléma esetében az egyik test sokkal kisebb tömegű, mint a másik kettő (pl. egy űrhajó a Föld–Hold-rendszerben). Régóta ismeretes, hogy a két, egymás körül keringő nagy tömegű test keringési síkjában öt olyan ún. Lagrange-pont létezik, ahol a harmadik, kis tömegű test tartósan megmaradhat, és a teljes, forgó konfiguráció állandó alakú marad. Az öt Lagrange-pont közül három a két nagy test egyenesébe esik, a másik kettő esetében viszont a három tömegpont szabályos háromszöget alkot.

    Vizsgáljuk meg a korlátozott háromtest-probléma elektromos megfelelőjét! A két nagy (M és m) tömegű test elektromos töltése legyen egyforma nagyságú, de ellentétes előjelű ($+Q$ és $-Q$). E testek az elektromos vonzóerő hatására Ω szögsebességgel körpályán mozognak a közös tömegközéppont körül (a fellépő egyéb erőket elhanyagoljuk, akárcsak az elektromágneses hullámok kisugárzását).

    Mozogjon a két nagy test keringési síkjában egy harmadik, μ tömegű, q töltésű tömegpont, ahol $\mu \ll m, M$ és $|q| \ll |Q|$, q pedig lehet pozitív és negatív is)! Határozzuk meg, van-e a két nagy test egyenesében olyan pont, ahol a kis test állandó helyzetben maradhat, azaz a teljes konfiguráció merev testként, ugyanazzal az Ω szögsebességgel forog! Hány ilyen pont létezik, és hogyan függ a számuk a probléma paramétereitől? Vizsgáljuk meg az egyensúlyi pontok stabilitását is!
    Léteznek-e további Lagrange-pontok a két nagy testet összekötő egyenesen kívül is?

    (Dávid Gyula)

11. Már Diracot is foglalkoztatta, hogy a G gravitációs állandó nem függ-e esetleg az időtől. A mérések szerint ez a változás csak nagyon kicsi lehet. Tegyük fel mégis, hogy ez nem feltétlenül van így! Vizsgáljuk meg numerikusan, hogyan változik a Föld Kepler-pályája és a megfelelő fázistérbeli szerkezet, ha $G(t) = G_0(1 + \alpha\, t)$, és $|\alpha| \approx 1/\text{év}$, ill. ha $|\alpha| \ll 1/\text{év}$! Az utóbbi esetben mennyire közelíti meg a numerikus számolás az adiabatikus invariánsok elméletéből adódó eredményeket?

    (Tél Tamás és Jánosi Dániel)

12. Dionnak nevezik azokat a hipotetikus részecskéket, amelyeknek elektromos töltésük mellett mágneses töltésük is van (az utóbbi ugyanolyan radiális mágneses **B** mező forrása, mint amilyen elektromos **E** mezőt kelt maga körül az elektromos ponttöltés).

Tanács: dolgozzunk CGS-egységrendszerben! Ekkor az elektromos és mágneses töltések mértékegysége azonos, akárcsak az **E** *és* **B** *mezőké.*

a) Rögzítsünk az origóban egy Q elektromos és g mágneses töltésű diont, amelynek terében egy m tömegű, $-e$ elektromos és nulla mágneses töltésű részecske (elektron) mozog! (Tekintsünk el a kölcsönhatás véges terjedési sebessége miatti retardálási effektusoktól, valamint az elektromágneses hullámok kisugárzásától is.)

Keressünk olyan mozgást, amikor az elektron állandó R sugarú körpályán kering állandó szögsebességgel! Hogyan kell megválasztani a rögzített dion töltéseinek előjelét ahhoz, hogy ilyen mozgás létrejöhessen? Mekkora r távolságra van ekkor a mozgó elektron az origótól? Számítsuk ki és vázoljuk fel az $r(R)$ függvényt! Van-e alsó vagy felső korlát az r távolság és az R sugár lehetséges értékeire? Mekkora az elektron pályamenti sebessége? Mekkora a T keringési idő a körpályán? Keressünk Kepler 3. törvényével analóg szabályt!

b) *Extra feladat ínyenceknek (a jó megoldás enélkül is maximális pontszámot érhet):* Elemezzük a problémát a speciális relativitáselmélet keretei közt! (Az elektromos és mágneses töltések által keltett mező változatlan, emellett továbbra is elhanyagoljuk az elektromágneses hullámok kisugárzását és a retardálást.) Válaszoljunk ismét az a) feladatrész kérdéseire, és vizsgáljuk meg a különbségeket!

(Lengőy Sándor)

13. Laposföld egy négyzetes hasáb alakú bolygó, a négyzetlap élei (a bolygólakók nyelvén „a Perem") 10000 km hosszúak, a hasáb vastagsága 2000 km, a bolygótest homogén tömegeloszlásúnak tekinthető, sűrűsége megegyezik a Föld átlagos sűrűségével. A bolygó lakói az egyik négyzetlap középpontja környékén, LapCentrál városában élnek. A laposföldiek néhány korábbi kalandjáról szólt a 2020-as Ortvay-verseny 27. feladata. Már akkor kiderült, hogy a bolygó lakói nagyon szeretik a téli sportokat, melyekre a bolygó jéggel borított felszíne sok lehetőséget ad nekik.

Az alpintechnika fejlődésével a legbátrabb sportolók egyre távolabb jutottak LapCentrál városától, és egyre közelebb kerültek a négyzetlap világűrbe meredő pereméhez és csúcsához. A visszaúton természetesen kihasználták a bolygó speciális gravitációs terét, és sílécen siklottak vissza a lakott területre. A síléc és a hágóvasak mellett az ilyen expedíciókhoz természetesen szkafanderre is szükségük volt. A csúcstechnológiás sílécek súrlódás nélkül siklanak, az áramvonalas szkafanderben pedig a légellenállás hatása is elhanyagolható.

Most pedig elérkezett az a magasztos pillanat, amikor a két legbátrabb hegymászó, Frédi és Béni elsőként áll a négyzetes hasáb egyik csúcsán, fölöttük csak a csillagos világűr, lábuk alatt három merőleges irányba nyúlik el a hasáb három éle. A csúcskönyv aláírása, valamint a kötelező szelfik elkészítése és feltöltése után felmerül a kérdés: merre is tovább?

Frédi szeretne visszatérni a városba, hogy egy kocsmában barátaival megünnepelje csúcsdöntő kalandjukat. Béni azonban úgy véli, hogy ha már ilyen messzire jutott, bűn lenne túl gyorsan elpazarolni a megszerzett helyzeti energiát, és kár lenne nem meglátogani a hasáb másik szomszédos, ugyancsak az ő lakott négyzetükkel határos csúcsát. Ehhez egyszerűen csak végig kell siklania a Perem egyik élén, amely itt kezdődik a lába alatt.

Elbúcsúznak egymástól, és sílécüket a megfelelő irányba állítva, kezdősebesség nélkül megkezdik útjukat: Frédi egyenesen a négyzetlap közepe felé, Béni pedig a Peremen a szomszédos csúcs irányába.

Hány takk szükséges Frédi, illetve Béni útjához? (Laposföld lakói valami furcsa okból a földi egyenlítői műhold keringési idejét használják időegységül, ezt nevezik 1 takknak.) Numerikus választ kérünk!

(Cserti József)

14. A kedvenc YouTube csatornámon: https://www.youtube.com/@TrainExperiments minden *franc*ot beraknak a (lassan haladó) mozdony kereke alá.

a) Bizonyos *franc*okat a kerék egyszerűen maga előtt tol.
b) Bizonyos *franc*okat kilő, mielőtt felgurulna rájuk.
c) Bizonyos *franc*okra felgurul, majd békésen legurul róluk.
d) Bizonyos *franc*okra felgurul, majd kilövi őket hátrafelé.
e) Bizonyos *franc*okra felgurul, majd a *franc* megállítja a kerék forgását és az álló kerék a *franc*on csúszik.

Megfelelő egyszerűsítő feltételek mellett karakterizáljuk, hogy mely *franc*okkal történnek a fenti esetek! Hogyan módosul a helyzet, ha a mozdony gyorsan halad?

(Balázs Márton)

15. Valamely árucikkből zérus szintről T idő elteltével X darabnak kell elkészülnie. Az egyszerűség kedvéért a darabszámot folytonos változóval mérjük, így jelölje $x(t)$ a t időpontig legyártott darabszámot, melyre $x(0) = 0$, $x(T) = X$. A termékszám dx növekményének megtermelési költsége a sebességgel arányosan $a\,\dot{x}(t)\,dx$, s ehhez az addig elkészült termékek dt idő alatt felmerült $b\,x(t)\,dt$ tárolási költsége adódik (a, b pozitív állandók).

a) Milyen $x(t)$ termelési görbe mellett lesz minimális valamely tetszőleges, de rögzített T időpontig a teljes

$$S = \int_0^T L(x, \dot{x})\,dt$$

költség, ahol $L = a\dot{x}^2 + bx$? Adjuk meg a minimális költség értékét az X, T változók függvényében!

b) Oldjuk meg a fenti problémát határozatlan T mellett, azaz minimalizáljuk a költséget a T változóban is! Számítsuk ki a termelési költségek minimumát X függvényében, s adjuk meg, ezt milyen $x(t)$ termelési görbe mellett érhetjük el!

c) Legyen p a termék egységára! A T-re vonatkozó minden korlátozás nélkül milyen teljes X termékszám mellett maximalizálhatjuk a nyereséget, azaz az árbevétel és a termelési költség különbségét? (Feltehetjük, hogy minden megtermelt termék vevőre talál.) Magyarán: oldjuk meg e variációs problémát teljesen szabad végpont mellett!

Egyértelműek-e az a), b) és c) részfeladatokban kapott optimális megoldások?

Ügyeljünk arra, hogy az $x(t)$ darabszám se nem csökkenhet ($\dot{x} \geq 0$), se nem lehet negatív ($x \geq 0$)! Továbbá felhívjuk a figyelmet arra, hogy valamely stacionárius megoldás önmagában nem elfogadható anélkül, hogy kimutatnánk, valóban a költség globális minimumát adja. Elméleti megoldásokat várunk, melyeket érdemes lehet grafikusan szemléltetni.

(Györgyi Géza és Varga Vázsony)

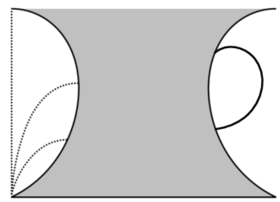
16. Tekintsünk egy vékony rugalmas szálat, melynek keresztmetszete kicsiny a oldalú négyzet, és T mechanikai feszültséggel feszítjük! A rugalmas szál alakváltozásait csavarodásokkal (bal oldali ábra) és tekeredésekkel (jobb oldali ábra) jellemezhetjük.

Tapasztalataink szerint (próbáljuk ki!), ha egy megfeszített gumiszálat elégszer megcsavarunk, akkor kialakul benne tekeredés, de ha növeljük a húzófeszültséget, a tekeredett állapot visszaalakul csavart állapottá.

Magyarázzuk meg a jelenséget, és adjunk becslést a csavarodások minimális számára, mely esetén létrejöhet tekeredés!

(Gombkötő Ákos)

17. Egy vékony falú forgásszimmetrikus söröskorsó feneke R sugarú körlap. A söröskorsó jellemzője, hogy bárhol ütünk apró lyukat a teli korsó oldalán, a vízszintesen kifolyó sörsugár éppen a korsó fenekét alkotó körlap szélére esik. További jellemzője, hogy csak félig lehet a korsó fenekére nézni, azaz a korsó fenekének felülről (minden lehetséges irányt egybevéve) belátható része a fenék területének éppen a fele.



a) Mennyi idő alatt folyik el a teli korsó sörünk, ha a korsó fenekén $r \ll R$ sugarú lyuk tátong?

b) Ha valaki egy teli korsó sört felborít, és a korsó eldőlve fekszik a vízszintes asztalon, akkor a sörnek maximum hányad része maradhat meg a korsóban?

(Gáspár Merse Előd)

18. A kapilláris effektus legegyszerűbb példája, amikor egy vékony, H hosszúságú, mindkét végén nyitott, henger alakú csövet függőlegesen tartva folyadékba mártunk. Ekkor a felületi feszültség hatására a folyadék a csövön belül megemelkedik, amennyiben a kontakt szög kisebb 90°-nál. A cső keresztmetszetének sugara r_0. A folyadékszint emelkedésének nagyságát a Jurin-törvény segítségével becsülhetjük meg, jelöljük ezt az értéket h_J-vel.

A feladatban a Jurin-törvény két módosulatát kell levezetni. Mindkét esetben feltételezhetjük, hogy a kialakuló meniszkusz görbültségéből fakadó effektusok elhanyagolhatóak, hasonlóan az eredeti Jurin-törvényhez.

a) Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a cső felső végét lezárjuk! Bemerítés helyett csak érintsük a cső alsó, nyitott végét a folyadékfelszínhez! A csőben lévő levegőt ideális gázként modellezhetjük, hőmérsékletét pedig állandónak tekinthetjük. A levegő nyomása a hozzáérintéskor megegyezik a p_0 külső légnyomással. A folyadék sűrűsége ρ, a nehézségi gyorsulás g. Hogyan módosul a Jurin-törvény a felső végén zárt cső esetén? Mekkora emelkedés várható, ha $\rho g h_J < p_0$?

b) A második esetben a cső mindkét vége nyitott, de keresztmetszetének sugara felfelé enyhén csökken az $r(z) = r_0 - \lambda z$ függvény szerint, ahol a z-tengely a folyadék felületére merőlegesen felfelé mutat, és $z = 0$ épp a szabad folyadék felületének szintjét jelöli ki. Hogyan módosul a Jurin-törvény a szűkülő cső esetén?

c) Az alábbi adatok felhasználásával becsüljük meg az emelkedés magasságát mindhárom esetben: 1) nyitott, egyenes cső – eredeti Jurin-törvény, 2) felső végén zárt egyenes cső – az a) feladatrész képlete, 3) nyitott, szűkülő cső – a b) feladatrész képlete! Adatok: $r_0 = 1\,\mathrm{mm}$, $H = 5\,\mathrm{cm}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\gamma = 0,072\,\mathrm{N/m}$, $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, $\Theta = 52°$, $p_0 = 1\,\mathrm{bar}$, $\lambda = 0,016$.

(Bácsi Ádám)

19. Ismert tapasztalati tény, hogy sétálás közben a kávé könnyen kifolyhat, ha a csészében lötyögés sajátfrekvenciája rezonanciába kerül a lépéseink ütemével. Adjunk becslést arra, hogy egy kétrétegű koktél esetében, amelyet éles határfelülettel elválasztott különböző sűrűségű folyadékrétegek alkotnak, hogyan alakulnak egy hengeres edényben a lötyögések sajátfrekvenciái a rétegvastagságok és a koktélt alkotó folyadékok sűrűségének függvényében!

(Vincze Miklós)

20. Egy V térfogatú tartály kezdetben kétféle ideális gázt tartalmaz: A-t és B-t. Csökkentve a hőmérsékletet a két gáz fázisátalakuláson megy keresztül.

Messze a kritikus ponttól az A anyag fázisainak koegzisztencia görbéjét a Clausius-Clapeyron-egyenlet írja le:

$$\frac{\mathrm{d}p_A}{\mathrm{d}T} = \frac{p_A L_A}{RT^2},$$

ahol R az egyetemes gázállandó, p_A az A gáz parciális nyomása, L_A a fajlagos látens hő, amely a vizsgált tartományban állandónak tekinthető. A B anyagra az egyenlet hasonló. A két gáz látens hője különböző értékű. A folyadékfázis térfogata a gázokhoz képest elhanyagolható. Feltehetjük, hogy a folyadékok ideális elegyet alkotnak.

Hogyan változik a nyomás a tartályban, ahogy a hőmérsékletet csökkentjük? Ábrázoljuk a görbét!

(Veszeli Máté)

21. Tekintsünk egy mechanikailag tömegponttal modellezhető, egyébként véges méretű testet, mely súlytalanul lebeg gáz halmazállapotú közegben. Értelmezhetjük a test U belső energiáját, melyet az

$$U = E - m\,\dot{\mathbf{r}}^2/2,$$

kifejezéssel, vagyis az E teljes energia és a mozgási energia különbségével definiálunk.

A test mozgasegyenlete

$$\frac{d}{dt}\,(m\,\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F} + \mathbf{D},$$

ahol $\mathbf{F}$ a külső erőt, $\mathbf{D}$ pedig a disszipációs erőt jelöli.

Elfogadhatjuk, hogy a disszipációs erő a rendszer teljes energiáját nem módosítja, az teljes egészében a külső erő munkája révén változik meg. A rendszer hőmérséklete pozitív, és a testen belül a hővezetés elég gyors ahhoz, hogy a hőmérséklet-eloszlás homogénnek legyen tekinthető, ugyanakkor a hőkapacitás elég nagy ahhoz, hogy a folyamat során a hőmérséklet lényegében ne változzon.
Kérdésünk: Ha a rendszer entrópiája nem csökkenhet, akkor milyen egyenlőtlenséget írhatunk fel a disszipációs erőre? Értelmezzük a kapott eredményt!

(Gombkötő Ákos és Ván Péter)

22. Egy gömb alakú bolygó körül a légkör is gömbszimmetrikus eloszlású. A levegő $n(r)$ törésmutatója csak a felszíntől mért távolságtól függ, és monoton csökken a felszíni n_0 értéktől a végtelen távolságban, a világűrben érvényes $n = 1$ értékig.

a) A bolygó felszínén álló űrhajós kézi lámpájából egy vízszintes, azaz a bolygó felületével párhuzamos fénysugarat bocsát ki. Mi a feltétele annak, hogy a fénysugár a légkörben elgörbülő pályán eljusson a világűrbe, illetve hogy ellenkezőleg, „leessen” a talajra? (Tekintsük el a bolygó forgásától, a fény légköri elnyelődésétől, valamint a fénynyaláb nem párhuzamos volta miatti szóródástól és gyengüléstől!)

b) A bolygó felé a végtelenből egy űrhajó érkezik. A fény légköri görbe pályája miatt az űrhajósok nagyobbnak látják a bolygó szilárd korongját, mint amekkora az valójában. Mekkora a látszólagos lineáris nagyítás? Hogyan függ össze ez a kérdés az előzővel? *(Tanács: fordítsuk meg a fénysugarak irányát!)*

(Dávid Gyula)

23. Egy ellenálláshálózatnak 6 csomópontja van. A hálózat i-ik és j-ik pontpárja között R_{ij} ellenállást mérünk (Ω egységekben). Az adatokat az alábbi $\mathbf{R}$ mátrixban adhatjuk meg:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 13 & 24 & 19 & 40 \\ 13 & 0 & 10 & 13 & 10 & 31 \\ 13 & 10 & 0 & 19 & 12 & 33 \\ 24 & 13 & 19 & 0 & 13 & 34 \\ 19 & 10 & 12 & 13 & 0 & 21 \\ 40 & 31 & 33 & 34 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Mekkorák a hálózat egyes pontjai közé kötött ellenállások értékei?

(*Tanács: a számolás során és a végeredmény közléekor ne használjunk tizedes törteket!*)

(Vattay Gábor)

24. Egy I árammal átjárt szabályos háromszög alakú drótkeret síkjában súrlódásmentesen mozoghat egy pontszerű, M tömegű és $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumú dipól. A dipólmomentum iránya merőleges a háromszög síkjára. Mennyi a mágneses dipól rezgésideje a háromszög középpontja körül kis kitérésekre? Mi a stabilitás feltétele?

(Cserti József)

25. Tekintsünk egy hosszú, r sugarú, henger alakú állandó mágnest, melyet ráállítunk egy sima felületű ferromágneses anyagból készített végtelen nagy asztalra. A henger alapja érintkezik az asztallal. A mágnes állandó, homogén és tengely irányú $\mathbf{m}$ mágnesezettséggel rendelkezik. Az asztal ferromágneses anyaga egy állandó, de nagyon nagy relatív permeabilitással rendelkező közegnek tekinthető. Mekkora mágneses erőt fejt ki az asztal a mágnesre?

(Széchenyi Gábor)

26. Két a sugarú, kör alakú, vezető dróthurok van ráfűzve egy függőleges irányú, állandó g gyorsulású gravitációs térben álló, a-nál valamivel kisebb sugarú, nem vezető anyagú hengerre. Az első gyűrű rögzített, míg a második gyűrű, amelynek ellenállása R, súrlódás nélkül mozoghat a henger mentén. Kezdetben a második gyűrű bizonyos magassággal az első felett helyezkedik el, és nyugalomban van.

Egy áramgenerátor hatására az első gyűrűben állandó I áram folyik. Ha a második gyűrűt leejtjük, a gyűrűben örvényáram keletkezik, mivel megváltozik a gyűrűn keresztül haladó mágneses fluxus. A Lenz-törvény miatt a második gyűrűre fékező erő hat.

Számítsuk ki egzaktul ezt a fékező erőt és a gyűrű mozgásegyenletét!

Az első gyűrű mágneses mezőjének mágneses dipólusmomentum-közelítését alkalmazva számítsuk ki a fékező erőt és a mozgásegyenletet abban a határesetben, amikor a két gyűrű távolsága sokkal nagyobb a-nál!

Mutassuk meg, hogy az így kapott erő megegyezik az erő pontos kifejezésének megfelelő hatványsorfejtése alapján kapott eredménnyel!

Vizsgáljuk meg analitikusan a mozgás hosszú távú viselkedését különböző kezdeti feltételek mellett!

A második gyűrűnek az első gyűrűre való visszahatása elhanyagolható az első gyűrű áramgenerátoros meghajtása miatt.

(Cserti József)

27. Mint köztudott (lásd Stanislaw Lem: *Kiberiáda*), a fejlegek, azaz a világegyetem legfejlettebb értelmes lényei által lakott bolygó kocka alakú. Ők ugyanis szupertechnikájuk birtokában ezt is megengedhették maguknak – és akkor már miért ne?

Egy valamire való bolygót persze mágneses térrel kell védeni a kozmikus hatásoktól. A fejlegek ezt forgó vasmag hiányában úgy oldották meg, hogy a kocka középpontjába egy nagy teljesítményű áramgenerátort szereltek, aminek áramát az egyik testátló mentén kivezették a kocka két szemközti csúcsára. Onnan pedig az áramkör a kocka összes élére szerelt (a szimmetria miatt természetesen teljesen egyforma) vezető síneken záródott. Az áramkör által létrehozott mágneses tér évmilliókon át megbízhatóan védte a külső hatásoktól a kocka felszínén és belsejében munkálkodó fejlegeket.

Az utóbbi időben azonban új (csillag)szelek fújnak a Galaxisban. A fejlegeket egyre több kritika érte a közönséges, gömbölyű bolygókon lakó kollégáik részéről, akik megorroltak rájuk nyíltan kimutatott fölényük és fennhéjázásuk miatt, aminek egyik jele maga a kocka alakú bolygó volt. Ők végül úgy döntöttek, nem hallgatják tovább az igaztalan vádakat és szemrehányásokat, inkább közönséges bolygónak álcázzák szupertechnikával felszerelt kockájukat. A szomszédos naprendszerből sok űrhajórakomány elektromosan szigetelő agyagot, homokot és más silány kőzetet hozattak, körültapasztották vele a kocka alakú bolygót (még a kocka sarkaira is jutott egy vékony talajréteg), amig az végül kívülről pontosan úgy nézett ki, mint egy nyamvadt CW2 osztályú kavicsos és sivatagos sárgolyó, amiből tizenkettő egy tucat (de még tizenhárom is). Ők pedig elégedetten visszavonultak az álcázó kőzetréteg alatt rejtőző kockájukba, ahol nyugodtan folytathatták tovább a világegyetem többi, náluk kevésbé fejlett értelmes lénye számára amúgy is teljesen érthetetlen tevékenységüket.

Amikor Trurl és Klapanciusz ismét meglátogatták a fejlegek bolygóját, fel sem ismerték. „De hát itt kellene lennie!" – vakarták a fejüket. „Ez biztosan nem az a bolygó" – mondta Trurl, – „talán elcserélték".

Klapanciusz azonban elővette régi, jól bevált mágneses iránytűjét, szorgosan bejárta a bolygó kopár, sivatagos felszínét, feltérképezte a mágneses tér vertikális és horizontális komponensét, az utóbbinak az észak-déli és a kelet-nyugati vetületét is, majd mindezeket az adatokat szintvonalas térképeken rögzítette. Amikor elkészült, diadalmasan mutatta fel térképeit Trurlnak: „Na ugye, hogy megmondtam! A fejlegek kockája itt rejtőzik a felszín alatt!"

Ekkor azonban egy arra járó kóbor üstökös kikapta kezéből a fáradságos munkával készített térképeket, és huss – magával vitte.

Az Ortvay-verseny résztvevőinek egyetlen feladata van: rekonstruálniuk kell Klapanciusz sajnálatos módon elveszett térképeit. A megoldóktól az eljárás leírásán és a számításokon túl három jól áttekinthető térképet várunk, melyek a mágneses mező egyes komponenseit ábrázolják a gömbi polárkoordináták függvényében, és amelyek alapján megállapítható a bolygó kérge alatt megbúvó kocka alakú struktúra létezése.

(Cserti József és Dávid Gyula)

28. Vizsgáljuk meg egy tömegpont mozgását a $\Phi(t,x)$ relativisztikus skalármező által kifejtett erő hatására, $(1+1)$ dimenziós téridőben. A mozgó tömegpont hatásintegrálja:

$$S = \int d\tau \, [-m\,c^2 - \gamma\,\Phi(t,x)],$$

ahol τ a részecske világvonala mentén mért sajátidő, γ a részecske és a skalármező közti csatolás erősségére jellemző állandó, m egy tömeg-dimenziójú paraméter, c pedig a téridőre jellemző állandó (köznapi nevén a fénysebesség).

Vezessük le a részecske χ rapiditásának a τ sajátidő szerinti deriváltját megadó képletet a lehető legtömörebb alakban!

(Dávid Gyula)

29. Vizsgáljuk meg egy relativisztikus tömegpont függőleges (z irányú) zuhanását (szabadesését) $\Phi(z)$ sztatikus négyesskalár-mező által kifejtett erő hatására! Legyen a részecske és a skalármező csatolási állandója $\gamma = 1$. A skalármező helyfüggését írjuk fel a megfelelő klasszikus problémához való hasonlóság érdekében $\Phi(z) = m\,g\,z$ alakban, ahol m a részecske tömegállandója (lásd a 28. feladatot), g pedig egy gyorsulás dimenziójú állandó, amelynek értéke megegyezik a földi nehézségi gyorsulással.

Indítsuk el a részecskét a $z = H$ koordinátájú pontból, nulla kezdősebességgel! Írjuk fel és oldjuk meg a mozgásegyenleteket, és adjuk meg zárt alakban a $z(t)$ függvényt! (A számolás során nem kell figyelembe venni semmiféle talajba ütközést, a $\Phi(z)$ függvény lineáris alakját a teljes térben tekintsük érvényesnek!)

Mekkora a test maximális sebessége a mozgás során?

Miért különbözik ilyen nagy mértékben a mozgás lefolyása a megszokott szabadesési feladat megoldásától? Adjunk fizikai magyarázatot!

Mutassuk meg, hogy jól megválasztott közelítéssel visszakapjuk a „hagyományos” szabadesés képleteit!

(Dávid Gyula)

30. Jean Luc Picard kapitány gondterhelten vakargatja kopasz fejét. Most kapta meg a szubtéri táviratot: a Csillagflotta parancsnoksága elrendelte a rezsicsökkentést.

A relativisztikus Enterprise csillaghajó épp fontos küldetésre indult, nyílegyenesen száguld az Epszilon kvadráns felé. A hajó M_0 teljes induló tömegéből m_0 a hasznos teher (emberek, robotok, étel, ital, holofedélzet, tricorderek, hajtómű és parancsnoki fotelek, ja meg a reaktor), a többi mind az újonnan kifejlesztett, igen hatékony, anamezon nevű üzemanyag, amivel dugig vannak a tartályok. A hajtómű $u = c/n$ (ahol $n > 1$) sebességgel bocsátja ki az anamezont, az n értéken nem lehet változtatni, csak a $d\tau$ sajátidő-egységenként kibocsátott anamezon $\mu(\tau)\,d\tau$ mennyiségét lehet szabályozni. A hajó most, az utazás első napján igen kellemes körülményeket biztosít utasainak, hiszen épp a földi mg súlyukat érzik a fedélzeten is. Az útiterv szerint félútig gyorsítanak, onnan hasonlóképp állandó sajátgyorsulással lassítanak majd.

Igen ám, de a felülbírálhatatlan flottaparancs értelmében takarékoskodniuk kell az anamezonnal. Az utasítás úgy szól, hogy mostantól sajátidő-egységenként a még rendelkezésre álló üzemanyagnak mindig csak akkora hányadát használhatják el, mint most, az utazás kezdetén. Valami nagyokos a központban kiszámolta, hogy így az anamezon örökre elég lesz, sohasem kell újra tankolni.

Picard kapitány sóhajtva betáplálja az utasítást a központi agyba, az pedig máris megkezdi a takarékoskodást.
Adjuk meg az űrhajó sebességét a sajátidő függvényében!

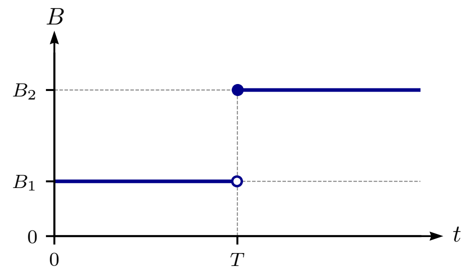
Hogyan változik az űrhajósok súlya az út során? (Tekintsünk el attól a kellemetlen mellékkörülménytől, hogy az élelmiszerrel is takarékoskodni kell.)

Becsüljük meg, hogy az eredeti útitervhez képest mikor érkezik meg a hajó a Földtől $L \gg c^2/g$ távolságra levő célállomásra!

Eredményeinket mutassuk be grafikonon is!

(Dávid Gyula)

31. Egy spintelen töltött részecske kétdimenziós térrészbe zárva mozog, melyre merőlegesen homogén mágneses mezőt hozunk létre. Egy adott $t = T$ pillanatban a mágneses indukcióvektor B_1 nagyságát hirtelen – azaz a részecske sebességéhez képest elhanyagolhatóan gyorsan, ugyanakkor a vákuumbeli fénysebességhez képest lassan – B_2 értékűre változtatjuk. Mindezt úgy tesszük, hogy a kezdeti és végső mágneses mezők iránya azonos; egy lehetséges példát szemléltet az alábbi *ábra*.



a) Tekintsük elsőre a probléma klasszikus modelljét, ahol a vizsgált részecske pontszerű testnek tekinthető! Számítsuk ki a mozgásegyenletek általános megoldását! Ábrázoljuk a mozgást néhány speciális kezdőfeltétel esetén!

b) Tekintsük ezután a probléma kvantumos megfelelőjét! A rendszert a $t = 0$ kezdőpillanatban az alapállapotban preparáljuk, majd valamely $t > T$ időpontban megmérjük a részecske energiáját. Mekkora a valószínűsége, hogy a rendszert az aktuális alapállapotban találjuk? Adjuk meg az energiamérés várható értékét is!

Megjegyzés: A matematikai részletek tisztaságáért feltételezhetjük, hogy a mágneses mező csak az általunk vizsgált kellően nagy térrészben homogén, azon kívül pedig hengerszimmetrikusan cseng le.

(Németh Róbert)

32. Anikó és Botond fizikushallgatók a kvantumos összefonódásról tanulnak. Értesültek róla, hogy két qubit esetén az ún. Bell-pár a fő példa az összefonódásra, ami az $SU(2)$-szinglettnek felel meg. Anikó és Botond meg akarják érteni a dolog ábrázoláselméleti hátterét is. Tanulják, hogy az $SU(2)$ csoport két fundamentális ábrázolásának szorzata a szinglett és a triplett ábrázolások összegére bomlik. A szokásos jelöléseket használva a szinglett ábrázolás a

$$|S\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

vektor, míg a triplett ábrázolás három bázisvektora

$$|+\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle\,, \qquad |0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |-\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle\,.$$

Anikó és Botond azon kezd el gondolkodni, hogy milyen az összefonódás a triplett ábrázolás vektorai esetében. A $|0\rangle$ vektor az érdekes: ez merőleges a szinglettre, viszont ugyanúgy nulla összmágnesezettséggel bír.

Botond szerint a $|0\rangle$ vektor nem összefonódott. Mégpedig azért, mert a $|0\rangle$ vektor a triplett ábrázolásban van, amiben vannak szorzatállapotok, és az összefonódásnak invariánsnak kell lennie, ami nem változhat egy forgatás hatására.

Anikó szerint azonban érdemes kiszámolni a dolgot. Szerinte az előjelkülönbség nem változtat semmit se, ezért az összefonódás (például a von Neumann-entrópia) ugyanaz lesz.

Kinek van igaza, és aki téved, az mit ront el?

(Pozsgay Balázs)

33. Pista bácsi az általa Nagy Szuperszonikus Mentőautó-Ütköztetőnek nevezett létesítmény közelében lakik. Ez egy sok kilométer átmérőjű, kör alakú tesztpálya, amelyen hangnál gyorsabb mentőautók róják tesztköreiket. Pista bácsi a pályát körülvevő palánkon kívül hallgatózva próbálja kifülelni a tesztpályán történteket. Korábbi tapasztalatairól szóló részletes beszámolóját lásd a 2022. évi Ortvay-verseny 28. feladatának szövegében (érdemes alaposan elolvasni).

Most viszont nagy változás történt. Pista bácsi a kocsmában meséli a legújabb híreket barátainak. A tesztpályát üzemeltető milliárdos (maga is az Ortvay-verseny lelkes feladatmegoldója) értesült Pista bácsinak a szuperszonikus mentőautók iránt tanúsított kiapadhatatlan érdeklődéséről, ezért meghívta az öreget: üljön bele a pályán körözö tesztautóba, és saját szemével, fülével, sőt fenekével tapasztalja meg, mit is csinálnak a mentőautók a pályán.

– Hát tudjátok, amikor a beszállás után elkezdett gyorsítani a mentőautó, olyan hangzavar lett, hogy inkább befogtam a fülemet, és becsuktam a szememet. De aztán oldalba böktek, hogy elértük az utazósebességet, ekkor kinyitottam a szememet, körülnéztem, és fülelni kezdtem. Igencsak unalmas látvány volt. A mentőautó állandó sebességgel száguldott, én ebből csak annyit láttam, hogy rohan szembe az unalmas körpálya, és nem történik semmi.

De aztán inkább a fülemre összpontosítottam, és rájöttem a suskusra. Nemhiába, hogy már tavaly is, a palánkon kívül, pusztán a hangokra hagyatkozva ki tudtam deríteni, hogy kvantumteleportáció vagy autó-párkeltés és -annihiláció folyik a pályán. Most ilyesminek nem láttam nyomát, de a fülemmel igen gyanús dolgokat tapasztaltam.

Rögtön rájöttem, hogy a látszat ellenére nem vagyunk egyedül a pályán! A mi mentőautónk veszettül visított, de hasonló hangokat észleltem a pálya két másik pontjából is. Odapislantottam, de nem láttam semmit. És most már tudom, hogy ezen a pályán a láthatók mellett láthatatlan mentőautókat is tesztelnek!
– Pont *két* másik mentőautó hangját hallotta? – csodálkozott a furfangos diák. – No és nem ütközött maguknak az a másik két láthatatlan mentőautó?

– Ó nem, ezek ravaszabbak és óvatosabbak ennél – válaszolta Pista bácsi. – A másik két autó ugyanakkora sebességgel száguldott a pályán, mint mi, ezért állandó távolsággal voltak mögöttünk (vagy előttünk, az ilyen körpályán sohasem tudhatja az ember). Így aztán a hangokat mindig ugyanabban az irányból hallottam. Az egyik láthatatlan autó valamivel mögöttünk haladt, a másik meg nagyjából a pálya velünk szemben levő részén.

Ezennel közbevetjük első kérdéseinket:

a) Hányszorosa volt a tesztpályán keringő szuperszonikus mentőautó sebessége a levegőben terjedő hang sebességének? Számadatot kérünk!

b) Pontosan milyen irányból hallotta Pista bácsi a láthatatlan mentőautók szirénázását? Számadatot kérünk (elegendő a pályamenti szögkülönbséget megadni)!

Pista bácsi még nem fejezte be:

– Gondoltam, kiugratom a nyulat a bokorból. Megkértem a tesztpilótát, lassítson egy kicsit, illetve gyorsítson egy kicsit. Ezt látva a láthatatlan mentőautók vezetőinek is reagálniuk kell, hogy elkerüljék az ütközést. Én meg hegyeztem a fülem, hogy megfigyeljem, mi történik. És képzeljétek...

Sajnos nem tudta befejezni, mert a csapos bezárta a kocsmát. Pista bácsiról pedig közismert, hogy kizárólag a kocsmaasztalnál, egy pohár bor mellett hajlandó elmesélni kalandjait. Így hát az érdeklődő kocsmai közönség, valamint az Ortvay-verseny megoldói kénytelenek saját kútfőből kifundálni a választ:

c) Mit tapasztalt Pista bácsi a szuperszonikus mentőautó kis mértékű lassítása, illetve gyorsítása során?

d) Az előbbiek alapján arra is válaszolhatunk, miért is csodálkozott a furfangos diák azon, hogy Pista bácsi pont *két* láthatatlan mentőautó hangját hallotta. Mikor nem kellett volna neki csodálkoznia?

(Dávid Gyula)

\end{document}